

位相空間論 (Topology)

私の研究テーマの一つは位相空間論 (Topology) です. この記事では, 位相空間論の代表的な位相同相という概念を紹介したいと思います.

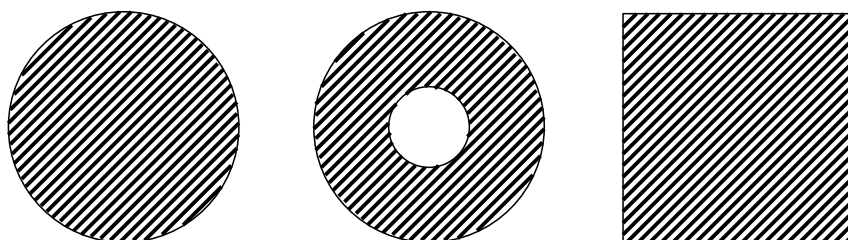
3次元以下の2つの図形 A, B において, それぞれの図形を切ったり, 潰したり, 違う図形を張り付けたりせずに, 伸ばしたり縮めたりする作業のみの変形で完成した図形が一致するとき, 2つの図形 A と B を同じ図形とみなします. これを位相同相とよび, $A \cong B$ と書きます. それでは, 次の例で位相同相の概念に触れてみましょう.

【1】1次元で考えてみましょう. 次の1~9の数字を図形とみなしたとき, 位相同相の概念において, 数字はどのように分類できますか?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

【1】の答えは， $1, 2 \cong 3 \cong 5 \cong 7, 6 \cong 9, 8$ の5種類に分類できます．1の記号を縦線で1と記載して考えた場合は， $1 \cong 2 \cong 3 \cong 5 \cong 7, 6 \cong 9, 8$ の4種類で分類できます．

【2】2次元で考えてみましょう．次の円盤，ドーナツ，四角形の3つの図形は位相同相の概念において，どのように分類できますか？



【2】の答えは，円盤と四角形が位相同相で，ドーナツが独立しています．

次元が低いと，図形をイメージできますが，次元が高くなると図形をイメージすることが難しくなってきます．上記で紹介した内容は1つの例にすぎませんが，図形の分類を高次元でも対応できるように数学で定式化していく分野の一つが位相空間論になります．

オイラー標数

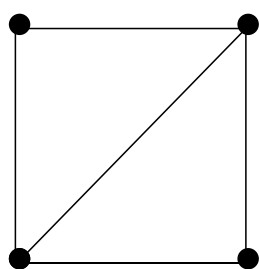
空間を分類するための、有名な道具としてオイラー標数が知られています. ある多面体 K のオイラー標数を $\chi(K)$ で表します. 多面体 K の頂点の個数を v , 辺の個数を e , 面の個数を f とするとき,

$$\chi(K) = v - e + f$$

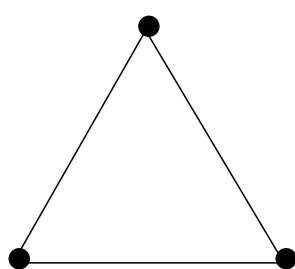
で定義されます. このとき, 2つの多面体 A, B が位相同相 $A \cong B$ であるならば, $\chi(A) = \chi(B)$ が成り立つことが, 証明されています. このとき, この命題の対偶を考えると,

$$\chi(A) \neq \chi(B) \Rightarrow A \not\cong B$$

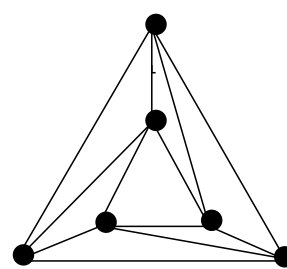
が成り立ちます. つまり, オイラー標数の値が違う2つの多面体は同相でないことが分かります. このとき, 次の2つの多面体 A, B のオイラー標数 $\chi(A), \chi(B)$ を計算してみましょう. ただし, K_3 の真ん中の三角形は空白とします.



K_1



K_2



K_3

K_1 の答え

$$v = 4, e = 5, f = 2 \text{ より, } \chi(K_1) = 4 - 5 + 2 = 1$$

K_2 の答え

$$v = 3, e = 3, f = 1 \text{ より, } \chi(K_2) = 3 - 3 + 1 = 1$$

K_3 の答え

$$v = 6, e = 12, f = 6 \text{ より, } \chi(K_3) = 6 - 12 + 6 = 0$$

K_1 と K_2 は位相同相であるから、オイラー標数が等しいことがわかる．実際に計算してみても

$$\chi(K_1) = 1 = \chi(K_2)$$

が成り立ちます． $\chi(K_1), \chi(K_2) \neq \chi(K_3)$ であるから、 K_1, K_2 と K_3 は位相同相でないことが分かります．

オイラー標数は、空間（図形）を分類するための数学的な道具の 1 つです．その他に分類する道具として、近年解決されたポアンカレー予想で有名なホモトピー群もあります．ホモトピー群に表れる代表的な振る舞いを一般化したホモトピー論を展開することが、私が主に研究している事です．特に、ホモトピー論は連続写像のような自由度が高い概念との相性がよく、微分可能写像のような柔軟性に欠ける概念との相性は良くないです．近年は、微分可能写像でホモトピー論を展開する手法を研究しています．